# Trigonometriai összefüggések az általános háromszögben

***Szinusz tétel***

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$ , ahol R a körülírt kör sugara

***Koszinusz tétel***

Háromszög egyik oldalának kiszámítása:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

Háromszög egyik szögének kiszámítása:

$$\begin{cases} cosA = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

Háromszög egyik szögének kiszámítása:

$$\begin{cases} sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \sin\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}} \\ \sin\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-b)}{ac}} \\ \cos\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-c)}{ab}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \mathrm{tg}\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ \mathrm{tg}\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{cases}$$

***Területképletek***

-ha egy háromszögben ismert egy oldal és a hozzátartozó magasság:

$$T = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

-ha egy háromszögben ismert két oldal és a közrezárt szög mértéke:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2}$$

-ha egy háromszögben ismert egy oldal és két szög mértéke:

$$T = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2\sin A} = \frac{b^2 \cdot \sin A \cdot \sin C}{2\sin B} = \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2\sin C}$$

-ha egy háromszögben ismert mindhárom oldal hossza:

$T = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ HERON képlet, ahol $p = \frac{a+b+c}{2}$ félkerület

vagy

$$T = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R},$$ ahol R a körülírt kör sugara

-ha egy háromszögben ismert mindhárom szög mértéke és a körülírt kör sugara:

$$T = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

-összefüggés a háromszögbe beírt kör, a félkerület és a terület között:

$T = p \cdot r$ ahol p a félkerület, r a háromszögbe beírt kör sugara

***<u>Összefüggés a háromszögbe beírt (r) és köré írt (R) kör sugarai között</u>***

$$r = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

***<u>A háromszög nevezetes vonalai az oldalak függvényében</u>***

***<u>- A háromszög oldalfelezőinek hossza:</u>***

$$\begin{cases} {m_a}^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} \\ {m_b}^2 = \dfrac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} \\ {m_c}^2 = \dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} \end{cases}$$

***<u>- A háromszög szögfelezőinek hossza:</u>***

$$\begin{cases} {i_a}^2 = \dfrac{2bc}{b+c} \cos \dfrac{A}{2} \\ {i_b}^2 = \dfrac{2ac}{a+c} \cos \dfrac{B}{2} \\ {i_c}^2 = \dfrac{2ab}{a+b} \cos \dfrac{C}{2} \end{cases}$$

***<u>- A háromszög magasságainak hossza:</u>***

$$\begin{cases} h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \\ h_b = \dfrac{2}{b}\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \\ h_c = \dfrac{2}{c}\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_a = 2R \sin B \sin C \\ h_b = 2R \sin A \sin C \\ h_c = 2R \sin A \sin B \end{cases}$$